Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

ЗАВДАННЯ I (30 балів)

5б	**1.** Знайдіть перший термін арифметичної прогресії $(a_n)_{n\ge1}$, знаючи, що $a_2=3$ і $a_3=5$.
5б	**2.** Розглядають функцію $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Знайдіть натуральне число n для якого $f(n)=3$.
5б	**3.** Розв’яжіть у множині дійсних чисел рівняння $\sqrt{x^2-9}=x-1$.
5б	**4.** Знайдіть число підмножини із трьома елементами множини $\{1,2,3,4\}$.
5б	**5.** У декартовому репері xOy розглядають точки $M(1,1)$, $N(3,3)$, $P(4,3)$ і $Q(1,a)$, де a - дійсне число. Знайдіть реальне число a, для якого чотирикутник $MNPQ$ є трапеція із базами MN і PQ.
5б	**6**. Обчисліть довжину гіпотенузи BC прямокутного трикутника ABC, у якому $AB=5$ і $\cos B=\frac{1}{2}$.

ЗАВДАННЯ II (30 балів)

	1. Розглядають матрицю $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b\end{pmatrix}$, де a і b - дійні числа.
5б	**a)** Докажіть, що $\det(A\cdot A)=a^2b^2$, для будь якого дійсного числа a і b.
5б	**b)** Розглядають матрицю $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ таким чином $A\cdot X=X\cdot A$. Докажіть, що якщо a і b є різні реальні числа, тоді існують реальні числа x і t тоді $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t\end{pmatrix}$.
5б	**c)** Для $a=4$ і $b=0$, визначте матрицю $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ для якою $Y\cdot Y=A$.
	2. На основі множини $M=[0,+\infty)$ визначається закон композиції $x*y=x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}$.
5б	**a)** Докажіть, що $3*3=12$.
5б	**b)** Докажіть, що $x*0=0*x=x$, для будь якого $x\in M$.
5б	**c)** Знайдіть $x\in M$ для якого $(x^2+2x)*3=7$.

ЗАВДАННЯ III (30 балів)

	1. Розглядають функцію $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.
5б	**a)** Докажіть, що $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5б	**b)** Докажіть, що функція f є конвекса.
5б	**c)** Розглядають функцію $g:(-1,0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+1)^x$. Докажіть, що, якщо $x_1,x_2\in(-1,0]$ таким чином $x_1\le x_2$, тоді $g(x_1)\ge g(x_2)$.
	2. Розглядають функцію $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^3$.
5б	**a)** Докажіть, що $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{3}{4}$.
5б	**b)** Докажіть, що $\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3dx=\frac{1}{12}$.

5б **c)** Докажіть, що $\int_0^1 \left(f(x)\right)^{n+1} dx \le \int_0^1 \left(f(x)\right)^n dx$, для будь якого ненульового натурального числа n.