

**CONCURSUL NAȚIONAL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR /CATEDRELOR DECLARATE  
VACANTE/REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR**

**2020**

**Probă scrisă  
MATEMATICĂ**

**Model**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	<b>a)</b> $a_4 = a_1 + 3r$ , deci $a_1 + 3(\sqrt{2} - 1) = 3\sqrt{2}$ $a_1 = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
	<b>b)</b> $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 36\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{9(2a_1 + 8r)}{2} = 36\sqrt{2}$ , deci $a_1 + 4r = 4\sqrt{2}$ , unde $r$ este rația progresiei $a_4 + r = 4\sqrt{2}$ , de unde obținem $r = \sqrt{2}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
	<b>c)</b> Presupunem, prin reducere la absurd, că există doi termeni raționali $a_p$ și $a_q$ , cu $p \neq q$ și, cum $a_p = a_q + (p - q)r$ , obținem $r = \frac{a_p - a_q}{p - q}$ , deci $r$ este număr rațional	<b>2p</b>
	$a_4 = a_p + (4 - p)r$ și, cum $a_p$ și $r$ sunt numere raționale, rezultă că $a_4$ este număr rațional, ceea ce este o contradicție	<b>3p</b>
<b>2.</b>	<b>a)</b> $BE \perp AC \Rightarrow \triangle ABE$ este dreptunghic, deci $\cos(\angle BAE) = \frac{AE}{AB}$ și, cum $\angle BAE$ are măsura de $60^\circ$ , obținem $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$	<b>2p</b>
	$CF \perp AB \Rightarrow \triangle AFC$ este dreptunghic, deci $\cos(\angle CAF) = \frac{AF}{AC}$ și, cum $\angle CAF$ are măsura de $60^\circ$ , obținem $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$ , deci $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$	<b>3p</b>
	<b>b)</b> $\angle BHF \equiv \angle CHE$ și, cum $\triangle BHF$ este dreptunghic în $F$ și $\triangle CHE$ este dreptunghic în $E$ , obținem $\triangle BHF \sim \triangle CHE$ $\frac{BH}{CH} = \frac{HF}{HE}$ , deci $BH \cdot HE = CH \cdot HF$	<b>3p</b> <b>2p</b>
	<b>c)</b> $P$ aparține mediatoarei segmentului $BH$ , deci $BP = PH$ și $Q$ aparține mediatoarei segmentului $CH$ , deci $CQ = HQ$ , de unde obținem $BP + CQ = PH + HQ$ $\angle BHF$ și $\angle CHE$ au măsura de $60^\circ$ și, cum $\angle BHP$ are măsura de $30^\circ$ și $\angle QHC$ are măsura de $30^\circ$ , obținem că $(HP$ și $HQ$ sunt bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf, deci sunt semidrepte opuse $P$ , $H$ și $Q$ sunt coliniare în această ordine, deci $PH + HQ = PQ$ , de unde $BP + CQ = PQ$	<b>1p</b> <b>3p</b> <b>1p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	<b>a)</b> $f(x \circ y) = f(x) \circ f(y)$ , deci $(x \circ y)^{-1} = x^{-1} \circ y^{-1}$ , pentru orice $x, y \in G$ Cum $(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}$ , obținem $y^{-1} \circ x^{-1} = x^{-1} \circ y^{-1}$ , de unde $x \circ y = y \circ x$ , pentru orice $x, y \in G$ , deci grupul $(G, \circ)$ este comutativ	<b>2p</b> <b>3p</b>
	<b>b)</b> $g(e) = e \Rightarrow e \in M$ , deci $M$ este nevidă Pentru orice $x, y \in M$ , $g(x \circ y) = g(x) \circ g(y) = e \circ e = e$ , deci $x \circ y \in M$ Cum, pentru orice $x \in M$ , $g(x^{-1}) = (g(x))^{-1} = e^{-1} = e$ , obținem că $x^{-1} \in M$ , deci $M$ este subgrup al grupului $(G, \circ)$	<b>1p</b> <b>2p</b> <b>2p</b>
	<b>c)</b> Pentru $x \in H$ și $a \in G \setminus H$ , dacă $x \circ a = y \in H$ , obținem $a = x^{-1} \circ y \in H$ , ceea ce este fals, deci $x \circ a \in G \setminus H$ , pentru orice $x \in H$ și $a \in G \setminus H$ $f(x \circ a) = g(x \circ a) \Rightarrow f(x) \circ f(a) = g(x) \circ g(a)$ și, cum $f(a) = g(a)$ , obținem $f(x) = g(x)$ , pentru orice $x \in H$	<b>2p</b> <b>3p</b>
	<b>2.</b>	
	<b>a)</b> $f'(x) = x' \cdot \arctg(x^2 + 1) + x \cdot \frac{(x^2 + 1)'}{1 + (x^2 + 1)^2} =$ $= \arctg(x^2 + 1) + x \cdot \frac{2x}{1 + (x^2 + 1)^2} = \arctg(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{1 + (x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
	<b>b)</b> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg(x^2 + 1) = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) - \frac{\pi}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg(x^2 + 1) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{1 + (x^2 + 1)^2} = 0$ , deci dreapta de ecuație $y = \frac{\pi}{2}x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f$	<b>2p</b> <b>3p</b>
	<b>c)</b> Dacă $J_n = (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx$ , atunci $J_n = \int_0^1 (x^{n+1})' f(x) dx = f(1) - \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx$ $f'$ este continuă pe $[0,1] \Rightarrow f'$ este mărginită pe $[0,1]$ , deci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \leq f'(x) \leq b$ , pentru orice $x \in [0,1]$ , de unde obținem $\frac{a}{n+2} \leq \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \leq \frac{b}{n+2}$ , deci $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = f(1) = \arctg 2 \neq 0$ Cum $I_n = \frac{n^\alpha}{n+1} J_n$ , obținem că limita șirului $(I_n)_{n \geq 1}$ este un număr real nenul $\Leftrightarrow \alpha = 1$	<b>2p</b> <b>2p</b> <b>1p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i>	
- menționarea competenței/competențelor evaluate	<b>1p</b>
- respectarea formatului itemului	<b>1p</b>
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	<b>2p</b>
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	<b>1p</b>

<i>Itemul de tip pereche</i> elaborat:	
- menționarea competenței/competențelor evaluate	<b>1p</b>
- respectarea formatului itemului	<b>1p</b>
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	<b>2p</b>
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	<b>1p</b>
<i>Itemul cu răspuns scurt</i> elaborat:	
- menționarea competenței/competențelor evaluate	<b>1p</b>
- respectarea formatului itemului	<b>1p</b>
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	<b>2p</b>
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	<b>1p</b>
<i>Itemul de completare</i> elaborat:	
- menționarea competenței/competențelor evaluate	<b>1p</b>
- respectarea formatului itemului	<b>1p</b>
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	<b>2p</b>
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	<b>1p</b>
<i>Itemul de tip întrebare structurată</i> elaborat:	
- menționarea competenței/competențelor evaluate	<b>1p</b>
- respectarea formatului itemului	<b>1p</b>
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	<b>2p</b>
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	<b>1p</b>
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme</i> elaborat:	
- menționarea competenței/competențelor evaluate	<b>1p</b>
- respectarea formatului itemului	<b>1p</b>
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	<b>2p</b>
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	<b>1p</b>